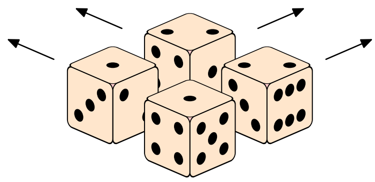
74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

Zadání úloh domácího kola

Kategorie A

1. Předpokládejme, že pro reálná čísla a, b mají výrazy $a^2 + b$ a $a + b^2$ stejnou hodnotu. Jaká nejmenší může tato hodnota být? (*Patrik Bak*)

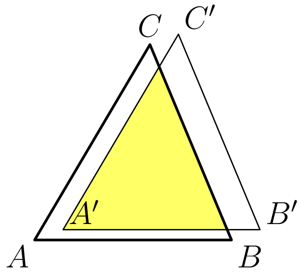
2. Martin k sobě přikládá hrací kostky (stejné velikostí i rozmístěním čísel) tak, aby byly vyskládané do tvaru čtverce libovolné velikosti a aby vždy na dvou přiléhajících bočních stěnách byla táž čísla. Kolik nejvíce různých čísel se může vyskytnout na horních stěnách kostek?



(*Martin Panák, Josef Tkadlec*)

3. Na tabuli jsou napsána navzájem různá přirozená čísla se součtem 2024. Každé z nich kromě nejmenšího je násobkem součtu všech menších napsaných čísel. Kolik nejvíce čísel může na tabuli být? (*Patrik Bak*)

4. Pro trojúhelník ABC platí $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|CA| = 15$. Jeho posunutím o vektor délky 1 vznikne trojúhelník $A'B'C'$. Určete nejmenší možný obsah průniku trojúhelníků ABC a $A'B'C'$. (*Tomáš Bárta*)



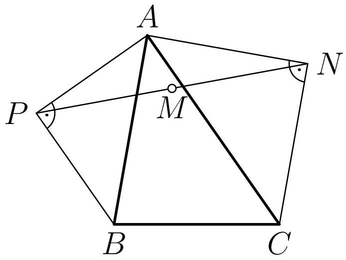
5. Saba se snaží z přízemí nekonečně vysokého mrakodrapu dostat do n-tého patra pomocí zvláštního výtahu. Ve výtahu jsou tlačítka $0, 1, 2, \ldots$ Po prvním stisknutí tlačítka pojede výtah nahoru a po každém dalším jede vždy opačným směrem, než posledně, přičemž po stisknutí tlačítka k popojede vždy o 2^k pater. Navíc každé další stisknuté tlačítko musí mít menší číslo než to předešlé. Dokažte, že Saba se do každého patra $n \geqq 1$ může dostat právě dvěma různými postupy. (*Morteza Saghafian*)

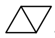
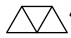
6. Označme I_A, I_B, I_C po řadě středy kružnic připsaných stranám BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Průsečíky výšek trojúhelníků I_ABC, AI_BC, ABI_C označme po řadě X, Y, Z. Dokažte, že trojúhelníky ABC a XYZ jsou shodné. (*Michal Janík*)

Kategorie B

1. Z číslic 1 až 9 vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Poté každou jeho dvojici po sobě jdoucích číslic interpretujeme jako dvojmístné číslo a na tabuli napíšeme jeho nejmenší prvočíselný dělitel. Můžeme tak na tabuli získat právě dvě různá prvočísla? Pokud ano, určete všechny takové dvojice prvočísel. (*Patrik Bak*)

2. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 45°$. Stranám AB a AC jsou vně připsány pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ABP a ACN s přeponami AB a AC. Označme M střed úsečky PN. Dokažte, že úsečka AM má délku rovnou polovině poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC. (*Patrik Bak, Anastasia Bredichina*)



3. Pro která přirozená čísla n lze rovnostranný trojúhelník se stranou délky n rozřezat na shodné dílky tvaru: a) , b) ? Dílky jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky se stranou délky 1. (*Pavel Calábek, Jaroslav Švrček*)

4. a) Najděte příklad dvojmístného přirozeného čísla n takového, že číslo $1/n$ má ve svém desetinném zápise za desetinnou čárkou právě dvě číslice.

b) Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla k, l existují právě dvě kladná racionální čísla, která mají v desetinném zápise za desetinnou čárkou právě k číslic a jejich převrácené hodnoty právě l číslic.

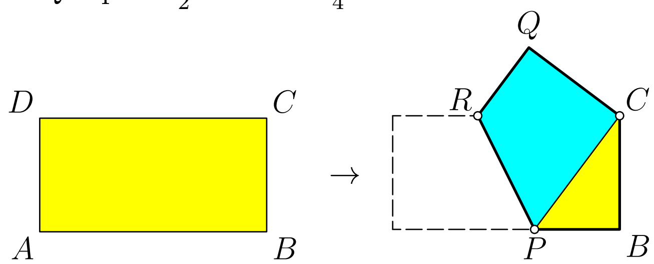
(Desetinný zápis uvažujeme nejkratší možný.) (*Josef Tkadlec*)

5. Označme k kružnici opsanou ostroúhlému trojúhelníku ABC. Její obraz v souměrnosti podle přímky BC protíná polopřímky opačné k BA a CA po řadě v bodech $D \neq B$ a $E \neq C$. Předpokládejme, že úsečky CD a BE se protínají na kružnici k. Určete všechny možné velikosti úhlu BAC. (*Patrik Bak*)

6. Kladná reálná čísla x, y, z splňují nerovnosti $xy \geqq 2$, $xz \geqq 3$, $yz \geqq 6$. Jakou nejmenší hodnotu může nabývat výraz $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$? (*Patrik Bak*)

Kategorie C

1. List papíru ve tvaru obdélníku $ABCD$ o rozměrech $a \times b$, kde $a > b$, přeložíme jako na obrázku tak, že vrchol A splyne s bodem C. Zdůvodněte, proč pro obsah S výsledného pětiúhelníku $PBCQR$ platí $\frac{1}{2}ab < S < \frac{3}{4}ab$.



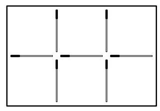
(*Josef Tkadlec*)

2. Přirozená čísla a, b jsou taková, že $a > b$, $a + b$ je dělitelné 9 a $a - b$ je dělitelné 11.

a) Určete nejmenší možnou hodnotu čísla $a + b$.

b) Dokažte, že čísla $a + 10b$ i $b + 10a$ musí být dělitelná 99. (*Jaromír Šimša*)

3. Rámeček 2×3 lze rozdělit na čtverce 1×1 umístěním 7 zápalek jako na obrázku. Které rámečky $a \times b$, kde $a \leqq b$, lze takto rozdělit pomocí právě 110 zápalek? Určete všechny možnosti. (*Josef Tkadlec*)



4. Šachovnicově obarvenou tabulku 4×4 s černým levým horním polem vyplňujeme jedničkami a nulami. V každém čtverci 2×2, který má černé levé horní pole, je stejný počet nul jako jedniček. Kolika různými způsoby lze tabulku vyplnit? (*Ján Mazák*)

5. Nechť P, Q jsou po řadě středy stran BC, AC trojúhelníku ABC. Rovnoběžka s AC procházející středem K úsečky PQ protíná přímku BQ v bodě L a přímka PL protíná úsečku AC v bodě R. Dokažte, že R je středem úsečky AQ. (*Jaroslav Švrček*)

6. Čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ s nenulovými číslicemi nazveme *zrcadlitelné*, právě když přičtením devítinásobku nějakého trojmístného čísla zapsaného pomocí tří stejných číslic vznikne číslo $\overline{dcba}$. Kolik zrcadlitelných čísel existuje?

(*Mária Dományová, Patrik Bak*)